Лекция №4. Уравнения прямой на плоскости. Уравнения плоскости и прямой в R^3. Взаимное расположение прямой и плоскости в R^3

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Прямая на оси Oy пересекает точку $N(0,b)$ и с положительным направлением оси Ох составляет угол α

$$tg\alpha = \frac{y-b}{x}; \qquad xtg\alpha = y-b; \qquad y = tg\alpha\, x + b$$

введем обозначение $tg\alpha = k$, тогда $y = kx + b$, где $k = tg\alpha$ - называется угловым коэффициентом. Если прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через данную точку (x_0, y_0) то $tg\varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, $y - y_0 = k(x - x_0)$ так как $tg\alpha = k$, то уравнение прямой через данную точку с угловым коэффициентом k имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$. С помощью угловых коэффициентов можно определить углы между прямыми.

Теорема. Тангенс угла α между прямыми $L_1: y = k_1x + b_1$ и $L_2: y = k_2x + b_2$ определяется формулой $tg\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$. Прямые L_1 и L_2 параллельны только в том случае когда $k_1 = k_2$. Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны только в том случае, когда $k_1k_2 = -1$.

2. Определение. Любой ненулевой вектор $\vec{a}$ на прямой L называется ее направляющим вектором.

3. Запишем абсциссы и ординаты обеих частей векторного уравнения, получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$$

эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой на плоскости.

4. Поскольку векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарные, то строки, составленные из их координат $((x-x_0),(y-y_0))$ и (l,m) пропорциональны, следовательно, $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ - это уравнение называется уравнением прямой с направляющим вектором.

5. Пусть прямая L проходит через две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$ с координатами $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ является направляющим для этой прямой. Поэтому, из уравнения с направляющим вектором получим, что $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Это уравнение называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

6. Раскрывая определитель в уравнении прямой с направляющим вектором, получим

$$m(x-x_0)=l(y-y_0),$$
$$mx-ly-mx_0+ly_0=0.$$

Обозначим m через A, $-l$ через B, $-mx_0+ly_0$ через C, в результате получим:

$$Ax+By+C=0.$$

Это уравнение называется общим уравнением прямой.

Теорема. Любая прямая L на плоскости Oxy определяется своим общим уравнением и любое уравнение вида $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$ задает некоторую прямую на плоскости.

Определение. Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой L, называется нормальным вектором этой прямой.

Следствие. Косинус угла φ между прямыми $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ и $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ с нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ находится по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}.$$

Следствие. Эти прямые перпендикулярны только в том случае, когда $\vec{n}_1\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2=0$

Следствие 3. Эти прямые параллельны только в том случае, когда $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

1. Пусть прямая L проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A,B)$, тогда ее уравнение имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Это уравнение называется уравнением прямой с нормальным вектором.

2. Пусть прямая L не проходит через начало координат и пересекает оси Ox и Oy в точках с координатами соответственно $(a,0)$ и $(0,b)$. Тогда уравнение этой прямой имеет вид: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Это уравнение называется уравнением прямой в отрезка.

Следствие. Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $L: Ax+By+C=0$ определяется формулой $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Пример. Расстояние от точки $M_0(1{,}3)$ до прямой $L: 3x+4y+10=0$ равно:

$$d=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 3+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

Уравнения плоскости

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ и перпендикулярной вектору $N=Ai+Bj+Ck$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

При произвольных значениях A, B и C последнее уравнение определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Его поэтому часто называют уравнением связки плоскостей.

2. Уравнение всякой плоскости может быть записано также в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (общее уравнение). Здесь A, B, C можно рассматривать как координаты некоторого вектора $N = Ai + Bj + Ck$, перпендикулярного плоскости (нормального вектора плоскости). Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду надо все члены уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm 1/N = \pm 1/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

3. Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0;$ параллельна оси Ox; $B = 0;$ параллельна оси Oy;

$C = 0;$ параллельна оси Oz; $D = 0;$ проходит через начало координат;

$A = B = 0;$ перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);

$A = C = 0;$ перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D \neq 0$, то, разделив все члены уравнения на - D, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (4)$$

(здесь $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$). Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках: в нем a, b, c - соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy, Oz.

4. Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2. \qquad (6)$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (7)$$

5. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (8)$$

6. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(r_1)$, $M_2(r_2)$, $M_3(r_3)$ (здесь $r_1 = x_1i + y_1j + z_1k$; $r_2 = x_2i + y_2j + z_2k$; $r_3 = x_3i + y_3j + z_3k$), проще найти из условия компланарности векторов $r-r_1,\ r_2-r_1,\ r_3-r_1$, где $r = xi + yj + zk$ - радиус-вектор текущей точки искомой плоскости $M:(r-r_1)\cdot(r_2-r_1)\cdot(r_3-r_1)=0$,

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases}$$

8. Прямая. Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

пересекающихся по этой прямой.

9. Угол между прямой $(x-x_1)/l = (y-y_1)/m = (z-z_1)/n$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \qquad (9)$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0; \qquad (10)$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/l = B/m = C/n. \qquad (10)$$

Пример. Уравнения прямых $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $5x + 4y - z - 7 = 0$ привести к каноническому виду.

Исключив сначала y, а затем z, имеем

$$13x + 11z - 11 = 0 \text{ и } 17x + 11y - 22 = 0.$$

Если разрешить каждое из уравнений относительно x, то получим

$$x = \frac{11(y-2)}{-17} = \frac{17(z-1)}{-13}, \text{ т.е. } \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

10. Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (1)$$

Так называемые канонические уравнения

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \qquad (2)$$

определяют прямую, проходящую через точку $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и параллельную вектору $s = li + mj + nk$. В частности, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

где α, β, γ - углы, образованные прямой с осями кординат. Направляющие косинусы прямой находятся по мурмулам

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{3}$$

Основная литература**:** [1] § 8,9, стр. 49-71

Дополнительная литература: [19] 1.5, стр. 23-33

Контрольные вопросы

1. Геометрический смысл углового коэффициента в уравнении прямой на плоскости
2. Уравнение прямой в отрезках.
3. Расстояние от точки до прямой.
4. Угол между плоскостью прямой.
5. Условие перпендикулярностей плоскостей